Deux crayons. Ontologie ensembliste

Habrias Henri

Nantes Université
Henri.Habrias@univ-nantes.fr

Abstract. Nous partons d'un énoncé d'Alain de Libera sur une situation décrite par Spade : "j'ai devant moi deux stylos à bille noirs. Le point crucial est : combien de couleurs vois-je ? Deux réponses s'offrent. La première : je ne vois qu'une seule couleur (croire aux universaux), c'est le réalisme. A l'opposé, le nominalisme est caractérisé par celui qui voit deux noirceurs, autant que de stylos". Nous montrons comment un langage de spécification formelle comme B permet de traiter la question.

Keywords: Formal Specifications, B method, Comments, Ontology

" Un couteau sans lame auquel il manque le manche" Georg-Christoph Lichtenberg, Aphorismes

1 Introduction

Nous partons de cette citation d'Alain de Libera : *" Revenons à une situation décrite par Spade : j'ai devant moi deux stylos à bille noirs. Le point crucial est : combien de couleurs vois-je ? Deux réponses s'offrent. La première : je vois une seule couleur - la noirceur (blackness) qui est " simultanément partagée par les deux stylos ou commune aux deux " -, une seule et même couleur donc, bien qu'inhérente à deux choses distinctes et présente en même temps en deux endroits différents. Cette position, ce que Spade appelle " croire aux universaux ", est le réalisme : admettre que des " entités universelles " comme la noirceur sont partagées par toutes les choses qui présentent une même propriété (ici, être noires) et qu'à ce titre elles leur sont communes. A l'opposé, évidemment, le nominalisme est caractérisé comme celui qui voit deux noirceurs, autant de noirceurs que de stylos. Deux noirceurs qui sont " semblables ", certes, mais qu' " il suffit de regarder pour voir qu'elles ne sont pas et n'en restent pas moins deux noirceurs ".*
Ainsi illustré, le problème des universaux est simple : y-a-t-il ou non deux couleurs dans les stylos de P.V. Spade ? " Le réalisme et le nominalisme sont les deux principales réponses à cette question. "... " le réaliste est celui, qui voyant la noirceur partout où il y a des choses noires, en conclut qu'il y a en chacune la même " entité universelle ". [1] p. 18-19
La *querelle des universaux*[2] date du Moyen Age. Mais elle a intéressé les logiciens comme W.V. Quine [11], B. Russell qui a lui aussi traité de l'exemple des

couleurs (voir [14]). Elle doit intéresser ceux qui aujourd'hui sont amenés à construire des abstractions pour faire faire des traitements de "connaissances" par des machines.
Dans cet article, nous montrons comment un langage comme celui de la "méthode B" permet de traiter le problème énoncé par A. de Libera. Nous introduirons la notation au fur et é mesure des spécifications proposées. Nous supposons que le lecteur connaît la théorie naïve des ensembles. Nous ne développerons pas des problèmes de l'existence des objets mathématiques, ou question ontologique, l"'ontologie d'une théorie étant l'ensemble de tous les énoncés d'existence des objets qu'elle étudie." Ce sujet est bien traité dans [4].

2 Introduction à B

B [9, 12] est une *méthode de spécification formelle* qui permet d'aller de la spécification abstraite au code exécutable, tout le processus étant validé par la preuve mathématique. Il y a deux types de preuves, la preuve d'opérations (il s'agit de s'assurer que si l'on appelle une opération sous sa précondition, l'invariant est respecté), la preuve de raffinage qui permet de s'assurer que le raffinage respecte bien la fonctionnalité et l'invariant défini au niveau plus abstrait. B utilise la théorie naïve des ensembles et donc la logique. Le langage ensembliste encapsulant le langage de la logique des prédicats du premier ordre. Par exemple, écrire $A \subseteq Q$, c'est "encapsuler" l'énoncé suivant, définition de l'inclusion ensembliste écrite en logique du premier ordre, $\forall ea \bullet ea \in A \Rightarrow ea \in Q$.

Nous commencerons par l'exercice que nous avons proposé à nos étudiants.

2.1 C'est du lard ou du cochon ?

Dans le livre d'Henriette Walter [17], voici ce que nous avons lu :
ce que l'on appelle ***lard*** *en français (d'où les lardons) correspond en anglais à* ***streaky bacon*** *"bacon zébré de graisse". Ce qu'on appelle du* ***bacon*** *en français (et aussi en anglais) est surtout fumé et comporte moins de graisse, tandis que ce qui se nomme* ***lard*** *en anglais correspond é ce qu'on appelle en français* ***le saindoux****.*
Vous me suivez ?
Le schéma ci-après (Figure 1) est - en principe - destiné à rendre ces distinctions plus claires."

- Question 1, Ce schéma est-il clair ? Dit autrement, pouvez-vous m'en donner une légende ? Si oui, fournissez cette légende.
- Question 2, Quel schéma proposez vous à Henriette Walter ?

Malgré tous mes efforts, je ne suis pas parvenu à trouver une légende au schéma d'Henriette Walter. Et voici le schéma que je propose (Figure 2).

Voici ce que nous écririons en B (machine *FrancaisAnglais*).

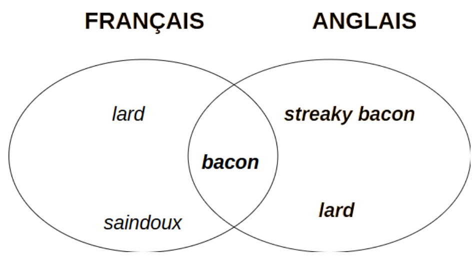

Fig. 1. Schéma proposé par H. Walter

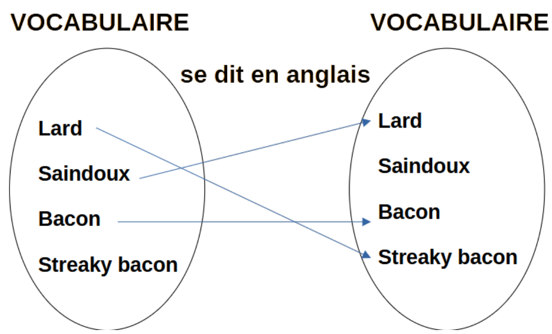

Fig. 2. Notre proposition

MACHINE
 $FrancaisAnglais$
SETS
 $VOCABULAIRE$ /* ensemble d'atomes */
VARIABLES
 $seDitEnAnglais$
INVARIANT
 $seDitEnAnglais \in VOCABULAIRE \leftrightarrow VOCABULAIRE$
DEFINITIONS
 $motsFrancais \mathrel{\widehat{=}} dom(seDitEnAnglais);$
 $motsAnglais \mathrel{\widehat{=}} ran(seDitEnAnglais)$
INITIALISATION
 $seDitEnAnglais := \emptyset$
OPERATIONS
 $ajoutCorrespondance(motFr, motAn) \mathrel{\widehat{=}}$
  PRE $motFr \in VOCABULAIRE \ \wedge motAn \in VOCABULAIRE$ THEN
   $seDitEnAnglais := seDitEnAnglais \cup \{motFr \mapsto motAn\}$
  END;
(...)
END

L'invariant est un prédicat. Ici on a écrit que $seDitEnAnglais$ est une variable dont la valeur appartient à l'ensemble de toutes les relations que l'on a de $VOCABULAIRE$ vers $VOCABULAIRE$.
Une définition en B, comme généralement en informatique, est le nom donné à un morceau de texte. Les informaticiens appellent cela une "macro". Ils disent qu'ils expansent la macro quand ils remplacent le nom par le morceau de texte. Une "macro" se différencie d'une variable. On ne peut faire de substitution dans une définition.
L'initialisation sert à s'assurer que l'on a bien au moins un modéle. Ici notre initialisation respecte bien l'invariant.
Notre opération est préconditionnée. Nous écrivons systématiquement la *plus faible précondition* pour que l'invariant soit respecté.
Et voici une instanciation, un modèle de cette spécification :
$seDitEnAnglais = \{(lard \mapsto streakybacon), (bacon \mapsto bacon), (saindoux \mapsto lard)\}$
$motsFrancais = \{lard, bacon, saindoux\}$
$motsAnglais = \{streakybacon, bacon, lard\}$
Si maintenant nous appelons l'opération $ajoutCorrespondance(fatalement, eventually)$, elle respectera l'invariant car nous avons spécifié $seDitEnAnglais$ comme une relation quelconque ($\leftrightarrow$) et non comme une fonction partielle ($\nrightarrow$).
Cet article met en avant le concept de relation, à une époque où bien des ontologies utilisées par les informaticiens suivent celles d'Aristote et de sa phrase *sujet (ou objet) attribut (ou prédicat, ou propriété)*. Nous suivons ici les leçons de B. Russell :

– *" Dans mon livre sur Leibnitz, j'avais souligné l'importance des propositions et des faits relationnels par opposition aux faits consistant en substance-est-attribut et aux propositions consistant en sujet-est-prédicat. Je m'étais aperçu que le préjugé contre les relations avait eu des conséquences néfastes aussi bien en mathématiques qu'en philosophie. "* (p. 108).
– *" ...la forme sujet-prédicat, que l'on supposait universelle, a(vait) empêché toute analyse exacte des suites ordonnées, et rendu par là l'espace et le temps inintelligibles. "* p. 91
– *" ...la logique traditionnelle considère la proposition comme l'attribution d'un prédicat à un sujet, (...) la croyance traditionnelle à l'universalité de la forme sujet-prédicat. Et cette croyance, à peine consciente, jugée de peu d'importance, opère sourdement ".* (p. 71) [15]

2.2 Introduction à B par les *logiques de description*

Les *logiques de description* sont plus connues que *B* dans la communauté *Représentation des connaissances.* Aussi allons-nous prendre une exemple qui a été traité en *logique de description* pour continuer notre présentation du langage B. Considérons l'exemple donné dans [5]:
"Nous voulons décrire des situations faisant intervenir des personnes, homme ou femme, qui se regroupent en ensembles appelés équipes.

On peut être membre d'une équipe et même chef d'équipe.
Les équipes d'au plus cinq personnes sont désignées comme des petites équipes.
Les équipes d'au plus quatre personnes qui ont au moins un chef et dont tous les chefs sont des femmes sont désignées comme des équipes modernes."

2.3 Concepts de base de B

En B, on est en théorie des ensembles typés. Les ensembles sont typés à l'aide de $SETS$. Les $SETS$ sont des "ensembles de base". Ce sont des ensembles d'individus, finis et non vides. Ensembles d'individus *i.e.* qu'un élément d'un SET n'est ni un couple, ni un ensemble. On n'a pas le droit d'écrire, si $CRAYON$ et $COULEUR$ ont été déclarés comme des $SETS$, des énoncés tels que : $CRAYON \cap COULEUR = \emptyset$. Un tel énoncé serait mal typé. Les $SETS$ peuvent étre des ensembles différés (*i.e.* on n'en donne pas une définition en extension, soit des ensembles énumérés. On construit de nouveaux ensembles à partir des ensembles de base, à l'aide du produit cartésien ($\times$) et de l'opérateur ensemble des parties ($\mathbb{P}$).

2.4 Première spécification

MACHINE
  $Personnes\_1$
SETS
  $PERSONNE; SEXE = \{masc, fem\}$
VARIABLES
  $aPourSexe$
INVARIANT
  $aPourSexe \in PERSONNE \nrightarrow SEXE \wedge$
  $equipes \in \mathbb{P}(PERSONNE) \wedge$
/* Nous avons mis un "s" à *equipes*, nous voulons donc parler de plusieurs équipes.
Or notre définition formelle spécifie que *equipes* est une équipe !
On voit là la nécessité de commenter !
"One of the first discoveries of the research by the Z team was the necessity of separating small chunks of formal material by paragraphs of informal prose, explaining the relationship between the formal symbols and reality, and motivating the decisions that are captured by the formalisation. The drafting of the informal prose was even more difficult to teach, learn and practice than the mastery of mathematical notations and concepts.", (Tony Hoare in [8])
On veut bien spécifier l'ensembles des équipes. Et notez qu'on n'a pas spécifié un ensemble d'identificateurs d'équipes. Alors modifions. */

$equipes \in \mathbb{P}(PERSONNE) \wedge$
/* Maintenant *equipes* est bien un sous-ensemble de l'ensemble des parties
de PERSONNE. C'est bien un ensemble d'ensembles de personnes.*/
$\emptyset \in equipes \wedge$ /*on peut avoir une équipe vide de membres */
$aPourChef \in equipes \nrightarrow PERSONNE \wedge$
/* toute équipe n'a pas de chef*/
$\forall pp \bullet pp \in ran(aPourChef) \Rightarrow pp \in aPourChef^{-1}[\{pp\}]$
/* tout chef doit être une personne qui est membre de l'équipe dont elle est chef */
DEFINITIONS
$HOMME \mathrel{\widehat{=}} aPourSexe\ [\{masc\}]$;
$FEMME = \widehat{=}\ aPourSexe\ [\{fem\}]$;
$petitesEquipes \mathrel{\widehat{=}} \{eq : equipes | card(eq) < 6\}$;
$equipesDePlusDe4Personnes \mathrel{\widehat{=}} \{eq \in equipes | card(eq) > 4\}$;
$equipesModernes \mathrel{\widehat{=}} dom(aPourChef \rhd FEMME) \cup$
$EquipesDePlusDe4Personnes$;
/* les équipes de plus de 4 personnes qui ont un chef et dont le chef est une femme
sont des équipes modernes. Notez que dans le texte informel que nous avons considéré
au départ il est écrit *Les équipes d'au plus quatre personnes qui ont au moins
un chef et dont tous les chefs sont des femmes sont désignées comme des équipes modernes.*
Le morceau de phrase *qui ont au moins un chef et dont tous les chefs sont des femmes*
amène à poser la question : *Une équipe peut-elle avoir plusieurs chefs ?*. Dans notre
spécification nous avons considéré que toute équipe ne pouvait avoir au plus qu'un chef.*/

ASSERTIONS
$HOMME \cap FEMME = \emptyset \wedge$
$HOMME \subseteq PERSONNE \wedge$
$FEMME \subseteq PERSONNE$
END

La variable $aPourChef$ est une fonction partielle ($\nrightarrow$). Les DEFINITIONS sont des noms donnés à des morceaux de spécifications, ce que les informaticiens appellent des *macros*.

2.5 Un complément d'information

Dans la suite de sa présentation, l'auteur introduit des individus explicitement. C'est alors que le lecteur se rend compte, qu'une équipe est représentée par un mot.
On pourra alors avoir une équipe vide en formation désignée par un nom. Une équipe sans membres et sans chef ! comme on peut avoir *" un couteau sans lame, auquel manque le manche "*,(Lichtenberg).

On introduit alors un SET $EQUIPE$.

Nous allons modifier en conséquence notre spécification.

MACHINE
$Personnes\_2$
SETS
$PERSONNE; SEXE = \{masc, fem\}; EQUIPE$
VARIABLES
$aPourSexe, equipes, aPourChef$
INVARIANT
$aPourSexe \in PERSONNE \mathrel{+\!\!\!\!\!\to} SEXE \wedge$
$equipes \subseteq EQUIPE \wedge$
$aPourChef \in equipes \mathrel{+\!\!\!\!\!\to} PERSONNE \wedge$
$estMembreDe \in PERSONNE \leftrightarrow EQUIPE \wedge$
$aPourChef \subseteq estMembreDe^{-1}$
DEFINITIONS
$HOMME \mathrel{\widehat{=}} aPourSexe^{-1}[\{masc\}];$
$FEMME \mathrel{\widehat{=}} aPourSexe^{-1}[\{fem\}];$
$petitesEquipes \mathrel{\widehat{=}}$
$\{eq \in equipes | card(estMembreDe^{-1}[\{eq\}]) < 6\};$
$equipesDePlusDe4Personnes \mathrel{\widehat{=}}$
$\{eq \in equipes | card(estMembreDe^{-1}[\{eq\}]) > 4\};$
$equipesModernes \mathrel{\widehat{=}}$
$dom(aPourChef \rhd FEMME) \cup$
$EquipesDePlusDe4Personnes;$
ASSERTIONS
$HOMME \cap FEMME = \emptyset \wedge$
$HOMME \subseteq PERSONNE \wedge FEMME \subseteq PERSONNE$
END

Sur cet exemple, on a pu se rendre compte que nous n'avions aucune difficulté à exprimer ce qui est exprimé en logique de description en utilisant l'approche de la “méthode” B.

Nous allons maintenant appliquer la notation B à l'exemple de Spade, cité par de Libera.

3 Diverses modélisations

Voici donc différentes spécifications (abstractions) . Nous commentons entre /* */ la spécification formelle.

3.1 Une première spécification

SETS
$CRAYON; COULEUR$
VARIABLES
$crayons, couleurs$
INVARIANT
$crayons \subseteq CRAYON \wedge$
$couleurs \subseteq COULEUR$
INITIALISATION
$crayons := \{cr1, cr2\} \parallel$
$couleurs := \{co1, co2\} \parallel$
/* on a deux éléments de l'ensemble crayons
On a deux éléments de l'ensemble couleurs.
Sans doute, le lecteur comme le spécifieur, ne pensera pas à cette abstraction.
Il distinguera sans doute (c'est ce que l'expérience nous a appris) deux crayons
et une couleur. Mais pourquoi distinguer deux crayons et ne considérer qu'une seule
couleur ? Dans l'entreprise qui fournit ces crayons, il n'y a, en l'occurrence,
qu'un crayon (d'ailleurs, on trouve la même référence écrite deux fois, ref. : 1791.)
Quand l'IUT de Nantes a commandé, il n'a pu faire référence à $cr1$ et é $cr2$,
mais seulement à cette référence qu'il a commandée en 100 exemplaires. */
$couleurDe := \{cr1 \mapsto co1, cr2 \mapsto co2\}$
$aLaMemeCouleurQue := \{cr1 \mapsto co2\}$
/* cette relation qui n'a ici qu'un seul élément (un seul couple), nous dit que
les couleurs $co1$ et $co2$ sont les deux mémes couleurs */
$aLaMemeCouleurQue = aLaMemeCouleurQue^{-1}$
/* si $cr1$ est de méme couleur que $cr2$, $cr2$ est de même couleur que $cr1$ */
$estLeMemeCrayonQue = \{cr1 \mapsto cr2\}$
/* $cr1$ et $cr2$ sont les mêmes stylos. A noter que pour dire cela, il faut que
$cr1$ et $cr2$ soient deux éléments,
on ne voit pas l'intérêt de spécifier que $cr1$ est le même que $cr1$!
On ne travaille que sur des noms ! */
$estLeMemeCrayonQue = estLeMemeCrayon^{-1}$

3.2 Une autre spécification

SETS
$CRAYON; COULEUR$
VARIABLES
$crayons, couleurs$
INVARIANT
$crayons \subseteq CRAYON \wedge$
$couleurs \subseteq COULEUR$
INITIALISATION
$crayons := \{cr1\} \parallel$
/* nous n'avons qu'un seul stylo. On va spécifier plus loin que nous
en avons 2 exemplaires. Mais aucune information dans notre abstraction
ne permet de distinguer entre ces deux exemplaires. Ils sont anonymes.
L'informaticien mettant en œuvre la loi "Informatique, Fichiers et Liberté"
dirait que nous ne traitons pas d'"information nominative ". */
$couleurs := \{co1\}$
/* nous n'avons qu'une seule couleur */
$couleurDe := \{cr1 \mapsto co1\}$
$nbreDeCrayons := \{cr1 \mapsto 2\}$
/* nous avons deux crayons cr11 */

3.3 Un crayon, une couleur

SETS
$CRAYON; COULEUR$
VARIABLES
$crayons, couleurs, mescrayons, couleursDe$
INVARIANT
$crayons \subseteq CRAYON\ land$
$couleurs \subseteq COULEUR \wedge$
$crayons = \{cr1\} \wedge$
$couleurs = \{co1\} \wedge$
$mesCrayons = iseq(crayons)$
/* nous avons une suite injective de stylos. Une suite comme $[p1, p1]$
ne serait pas injective car on y a écrit deux fois $p1$.
Nous pouvons distinguer tel stylo de tel stylo comme on distingue
Bush junior de Bush senior (*i.e.* par leur place dans un arbre généalogique).
Dans la spécification précédente, nous ne pouvions distinguer un stylo
d'un autre, dans cette spécification, nous le pouvons. C'est comme dire,
prenez le stylo que j'ai dans ma main droite. */
$mesCrayons = [cr1, cre2]$
$couleurDe = \{cr1 \mapsto co1\}$

3.4 Et une autre

SETS
$CRAYON; COULEUR$
INVARIANT
$crayons \subseteq CRAYON \wedge$
$couleurs \subseteq COULEUR \wedge$
$crayons = \{cr1, cr2\}$
/* Voici la spécification que rédigeront sans doute la plupart des spécifieurs. Et pourtant c'est une des spécifications qui ne convient sans doute à aucune entreprise ! */
$couleurs = \{co1\}$
$couleurDe = \{cr1 \mapsto co1, cr2 \mapsto co2\}$
$estLeMemeCrayonQue = \{cr1 \mapsto cr2\}$
$estLeMemeCrayonQue = estLeMemeCrayonQue^{-1}$

Nous pouvons définir l'ensemble des choses noires.
Voici comment s'écrit cette définition en B :
DEFINITIONS
$noire \mathrel{\widehat{=}} couleurDe[\{noir\}]$
/* noire est l'image relationnelle de l'inverse de la relation $couleurDe$ pour l'ensemble singleton $\{noir\}$ */

Remarquons que l'on peut aussi se passer de l'ensemble $COULEUR$ et spécifier ainsi :

3.5 et encore

SETS
$CRAYON$
INVARIANT
$crayons \subseteq CRAYON$
$crayons = \{cr1, cr2\}$
$noir \subseteq CRAYON \wedge$
$bleu \subseteq CRAYON \wedge$
$rouge \subseteq CRAYON \wedge$
$noir = \{cr1, cr2\}$ /* si nous avions aussi des crayons de couleur bleu et des crayons de couleur rouge, nous spécifierions, par exemple, ainsi :
$bleu \subseteq CRAYON \wedge$
$rouge \subseteq CRAYON \wedge$
$bleu = \{cr4\}$
$rouge = \{cr5, cr7\}$

En continuant avec la même approche, on peut aussi spécifier ainsi :

3.6 Encore une autre

SETS
$CRAYON$
INVARIANT
$crayons \subseteq CRAYON \wedge$
$crayons = \{cr1, cr2\} \wedge$
$noir \subseteq CRAYON \wedge$
$bleu \subseteq CRAYON \wedge$
$rouge \subseteq CRAYON \wedge$
$noir = \{cr1, cr2\} \wedge$
$noir = \{cr1, cr2\}$
/* Voici une instanciation :*/
$bleu = \{cr4\}$
$rouge = \{cr5, cr7\}$
$couleurs = \{noir, bleu, rouge\}$
/* couleurs est un ensemble d'ensembles de stylos */

3.7 et une autre

SETS
$CRAYON; COULEUR$
INVARIANT
$crayons \subseteq CRAYON \wedge$
$couleurs \subseteq COULEUR \wedge$
$crayons = \{cr1\} \wedge$
$couleurs = \{co1, co2\}$
$couleursDe = \{cr1 \mapsto co1, cr1 \mapsto co2\}$
/* Oui, pourquoi pas ? vous me direz que je pousse le bouchon
un peu loin. C'est que vous "connaissez bien les stylos et les couleurs" !
mais qu'en serait-il si il s'agissait d'un domaine inconnu pour vous ? */
$sameColorAs = \{cr1 \mapsto cr2\}$
$aLaMemeCouleurQue = aLaMemeCouleurQue^{-1}$

3.8 et ce n'est pas fini

SETS
$CRAYON$
INVARIANT
$crayons \subseteq CRAYON \wedge$
$couleurs \subseteq CRAYON \wedge$
$noir = \{cr1, cr2\} \wedge$
$blanc = \emptyset$

/* J. S. Mill cité par U. Eco: "*Le mot blanc dénote toutes les choses blanches, telles que la neige, le papier, l'écume de mer, etc. et implique, ou, pour utiliser*

le langage des scolastiques, connote, l'attribut de la blancheur.".
Remarquons qu'ici blanc ne dénote que les choses blanches de notre univers ($CRAYON$). */

Si nous voulions définir l'ensemble des crayons qui sont de même couleur noire, il nous faudrait spécifier ainsi :

SETS
$CRAYON; COULEUR; COLORATION$
[a]*/
INVARIANT
$crayons \subseteq CRAYON \wedge$
$couleurs \subseteq COULEUR \wedge$
$colorNess \subseteq COLORNESS \wedge$
$crayons = \{cr1\} \wedge$
$couleurs = \{cr1, cr2\} \wedge$
$couleurDe = \{cr1 \mapsto co1, cr1 \mapsto co2\} \wedge$
$colorNessDe = \{cr1 \mapsto noir, cr2 \mapsto noir\} \wedge$
$noire \mathrel{\widehat{=}} couleurDe^{-1}[\{noir\}]$

[a] En anglais, nous avions le mot *colorness*, mot dont nous n'avons pas trouvé la traduction dans les dictionnaires consultés. Facile ! nous pouvions cacher notre incompétence langagière en inventant un mot. Les informaticiens font cela souvent. Mais nous n'avons pas osé coloritude ! Nous avons consulté le Roget's Thesaurus of synonyms & antonyms, en vain. Le *Trouver le mot juste* de Paul Rouaix, nous a donné *coloration*

3.9 Composition

On peut considérer que les deux stylos sont un produit vendu par l'entreprise dont on spécifie le système d'information. Il n'est pas possible d'acheter moins que le "pack" de "deux stylos" et le "pack" est un pack de stylos noirs.

SETS
$PRODUIT; COULEUR$
INVARIANT
$produits \subseteq PRODUIT \wedge$
$produits = \{p1\} \wedge$
$couleurs \subseteq COULEUR \wedge$
$couleurs = \{c1\} \wedge$
$comprendUnNombreDeStylosEgalA = \{p1 \mapsto 2\}$

/* le produit $p1$ est composé de deux stylos */

3.10 Et si...

Remarquons que si nous avions spécifié :

SETS
 $PRODUCT; COULEUR$
INVARIANT
 $produits \subseteq PRODUIT \wedge$
 $produits = \{p1, p2\} \wedge$
 $estEnNombreDe \in produits \rightarrow NAT \wedge$
/* $estEnNombreDe$ est défini comme une fonction totale.
A ce point de la lecture de la spécification, on peut ne pas être
au clair sur ce qu'est un élément de l'ensemble $PRODUIT$.
Demandons é notre client de nous donner un exemple de la fonction :
$estEnNombreDe = \{p1 \mapsto 1, p2 \mapsto 1\}$

Nous lui demandons alors si le nombre peut être supérieur à 1. Il nous répond qu'il est toujours de 1. Et finalement, après réflexion, il convient de supprimer la fonction $estEnNombreDe$ de la spécification.

Notre client a suivi Frege dont voici ce qu'écrit B. Russell : *"C'est un fait, comme le remarque Frege, qu'il n'y a pas de nombre, même 1, qui soit applicable aux choses physiques, mais qu'il ne l'est qu'aux termes généraux ou descriptions, tels que "homme", "satellite de la terre", "satellite de Vénus" ... De même,* 0 *est une propriété du terme général "Satellite de Vénus", parce que Vénus n'a pas de Satellite. Ici, au moins, avons-nous une théorie intelligible du nombre* 0*. C'était chose impossible quand les nombres s'appliquaient aux objets physiques, parce que, de toute évidence, aucun objet physique ne pouvait avoir* 0 *comme nombre. "* [15]

On peut considérer que l'on a un ensemble de composants.

3.11 Composants et composés

SETS
 $COMPOSANT; COULEUR$
INVARIANT
 $composants \subseteq COMPOSANT \wedge$
 $composants = \{p1, p2, p3\} \wedge$
 $estComposeDe \in composants \leftrightarrow composants \wedge$
 $estComposeDe = \{p1 \mapsto p2, p1 \mapsto p3\} \wedge$
 $produits \subseteq composants \wedge produits \cap ran(estComposeDe) = \emptyset$
/* les produits ne composent pas un composant */
 $nbDeProduits = \{p1 \mapsto 2\}$
/* à ne pas confondre avec le cardinal de produits (qui est ici égal à 1) */

4 Où nous vous envoyons sur les roses avec Abélard et Bacon

Voici ce qu'écrit U. Eco [10], dans son apostille au Nom de la rose : *"Pour Abélard, rosa signifiait en tant que le nom signifiait le concept de la chose, même si la chose n'existait pas ou avait cessé d'exister. La position de Bacon est différente : pour cet auteur, lorsqu'on dit "il y a une rose" (lorsqu'une rose existe), le signifié du mot est fourni par la rose elle-même, concrète. Si cette affirmation est prononcée lorsqu'il n'y a aucune rose, le mot rose ne se réfère alors plus à une rose effective, mais à l'image de la rose supposée que l'énonciateur a à l'esprit. Il y a deux référents différents et le même son "rose" constitue en réalité une occurrence de deux types lexicaux différents. "*

Nous modéliserons ainsi :

SETS
$ROSE$

/* Il est intéressant de noter que, dans les livres sur la notation Z
ou sur la notation B, il est souvent écrit qu'un ensemble de base,
comme $ROSE$, dénote *l'ensemble des roses passées, présentes et à venir.* */
L'opération de "naissance" d'une rose, se spécifiera ainsi en B : */
OPERATIONS
$naissance(coul) \widehat{=}$
/* on va faire naître une rose d'une certaine couleur coul passée en paramètre */
PRE
$coul \in COULEUR \wedge$
$ROSE - rosesDejaNees \neq \emptyset$
/* les ensembles de base sont des ensembles finis. On s'assure qu'il reste des
roses à faire naître */
THEN
ANY $ros \in (ROSE - rosesDejaNees)$THEN
/* on fait un choix indéterministe. On prend n'importe quelle rose non encore née */
$rosesDejaNees := rosesDejaNees \cup \{ros\} ||$
/* := est une substitution. Se lit on substitue à l'ancienne valeur
de la variable $rosesDejaNees$, sa nouvelle valeur qui est égale à
l'union ensembliste de son ancienne valeur avec le singleton $\{ros\}$.
|| exprime que les substitutions sont faites en parallèle */

$aPourCouleur := aPourCouleur \cup \{ros \mapsto coul\} \wedge$
$rosesVivantes \subseteq ROSE \wedge$
/* $rosesVivantes$ est l'ensemble des roses concrètes de Bacon */
$rosesDetruites \subseteq ROSE \wedge$
$rosesVivantes \cap rosesDetruites = \emptyset \wedge$
/* une rose ne peut étre à la fois vivante et détruite */
$maRose \in rosesVivantes \cup rosesDetruites \wedge$
/*La rose dont je parle appartient à l'ensemble $rosesVivantes$ ou é l'ensemble $rosesDetruites$.
Le mot "la rose que je t'ai offerte" aurait pour Bacon deux référents différents : la rose dont tu as respiré le parfum lorsque je te l'ai offerte il y a trois jours dans ce restaurant de poissons, et la rose dont il ne te reste aujourd'hui que l'image.
$rosesDetruites \subseteq ROSE \wedge$
$rosesOffertes \subseteq ROSE$
/* $rosesOffertes$ et $rosesDetruites$ ne sont pas obligatoirement des ensembles disjoints */
$laroseque jet'aiofferte \in rosesOffertes \cup rosesDetruites$ END

Notons que les informaticiens utilisent des automates pour modéliser les changements d'état des objets. "A Nantes, la Loire sans O (eau) ne devient pas la Lire !". On considère que la Loire change d'état comme la rose (et pour changer d'état il faut qu'elle ait une "identité", une "individualité propre". En l'occurrence, on considère un état "haute" et un état "basse" selon la marée. Et c'est ce que l'on dit en langage naturel français, à chaque marée, à l'entrée du pont de Pirmil on ne change pas le panneau portant le nom du fleuve.

5 Conclusion

Les éléments de nos ensembles sont-ils des concepts ou des noms ?
Il doit être clair que ce ne sont que des chaînes de caractères. Ces chaînes peuvent pour nous désigner des concepts. Pour cela, il faut qu'il y ait bijection entre l'ensemble des chaînes et des concepts. Cette bijection ne se trouve pas dans la spécification !. On n'a que des mots pour que cette bijection s'établisse dans la tête des lecteurs de notre spécification lorsqu'ils lisent cette dernière. Même celui qui écrit des spécifications formelles ne peut cacher qu'il espère bien que le lecteur "va voir ce qu'il (lui, le spécifieur) veut dire".

Nous terminerons par cette citation de J.F. Perrot qui un jour sous forme de boutade, nous a dit *"Je ne crois pas aux ensembles, je crois aux objets"* : *"...selon nous, l'approche objet reproduit fidèlement, dans le contexte informatique, une partie de la démarche logique et métaphysique du Stagirite (...). Cette* *référence n'est pas innocente : elle manifeste que l'approche objet met en œuvre un système de pensée antérieur à la révolution opérée au XVIIéme siécle par Galilée et Descartes. Analysant le passage de la physique d'Aristote à la physique moderne (au sens de l'histoire des sciences), Alexandre Koyré [6] note que "la physique d'Aristote ... s'accorde - bien mieux que celle de Galilée - avec le sens commun et l'expérience quotidienne ... " (...) Le fond de la question, selon nous, est que l'approche permet de traduire en structures informatiques des opérations intellectuelles qui relèvent du bon sens (...). C'est là sa force. C'est aussi peut-être la source cachée de nombreuses difficultés qui sont aussi celles de l'aristotélisme si, pour citer de nouveau Koyré [6], "le sens commun est - a toujours été - médiéval et aristotélicien. "*[1] [7]

Nous avons voulu éviter de *nombreuses difficultés qui sont aussi celles de l'aristotélisme*. Et nous avons illustré par l'exemple, que la mathématique naïve des ensembles nous permet d'affirmer : *nous avons les moyens de vous faire parler !*

References

1. de Libera Alain (1996) *La querelle des universaux, De Platon é la fin du Moyen-Age*. Des Travaux, Seuil, 1996, ISBN : 2-02-024756-9
2. de Libera Alain (1999) *L'art des généralités, théories de l'abstraction*. Aubier, ISBN : 2-7007-3355-X
3. Eco U. (1985) *Le nom de la rose*. Grasset
4. Wikibooks (2007) *Fondements mathématiques/ les expressions formelles, les ensembles et les fonctions*. http://fr.wikibooks.org/wiki/Fondements_des_maths
5. Napoli Amadeo (1977) *Une introduction aux logiques de description*, Rapport de recherche, INRIA n°3314, déc.
6. Koyré Alexandre (1973) *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*. Coll. Tel, Gallimard
7. Perrot Jean-François (1998) *Objets, classes, héritage : définitions, in Ducournau et al., Langages et modèles à objets, Etat des recherches et perspectives, Coll. Didactique D-19*. INRIA, http://co4.inrialpes.fr/lmobook/
8. Hoare C.A. 1990 C.A. R. Hoare (1990), Préface à VDM'90, VDM and Z - Formal Methods in Software Developemnt, LNCS, ISBN 3-540-52513-0
9. Abrial J.R. (1996) *The B-Book, Assigning Programs to Meanings*. Cambridge University Press.
10. Eco U. (1992) *Le signe*. French translation of *Il Segno* (1971). Le livre de poche.
11. Quine W.V. (2003) *Du point de vue logique, Neuf essais logico-philosophiques*. Traduit sous la direction de S. Laugier. Vrin.

[1] Pour illustrer ces difficultés dont parle J.F. Perrot, nous citerons [16] : *" Si le feu est regardé comme une chose - pour les présocratiques il est un des 4 éléments -, et non comme une réaction entre plusieurs choses, on ne peut rien comprendre. Or l'observation nous présente le feu comme une chose ". La vision du feu comme une entité, un objet avec ses propriétés a bloqué l'invention scientifique. C'est en 1785 que Lavoisier a détruit la conception substantielle du feu et la théorie phlogistique, en réalisant l 'analyse et la synthèse de l 'eau.*

12. Habrias H. (2001) *Spécification formelle avec B.* Hermes Lavoisier.
13. Minsky M. L. (1968) Matter, mind and models, *Semantic Information Processing.* MIT Press.
14. Russell B. (1961) *Histoire de mes idées philosophiques*, Chap. XIV, Les universaux, les particuliers et les noms. Gallimard
15. Russell B. (2002) *La méthode scientifique en philosophie.* Petite bibliothèque Payot, ISBN : 2-228-89529-6
16. Jouary J.P.2002 *Enseigner le vérité ? Essai sur les sciences et leurs représentations.* L 'Harmattan
17. Walter H. (2001) *Honni soit qui mal y pense, L'incroyable histoire d'amour entre le français et l'anglais.* Le livre de poche