Vérification paramétrique de propriétés périodiques dans un modèle hybride de dynamique épidémiologique

Fatima Khochman
khochmanfatme@gmail.com

Université de Montpellier / Nantes Université - LS2N (VELO)
B. DELAHAYE, G. CANTIN

3 juillet 2023

Plan

Motivation

Contexte

- Reproduction non satisfaisante des systèmes du monde réel par des modèles à formalisme unique.
- Intérêt croissant pour les modèles hybrides.
- Absence de méthodes de vérification symbolique pour l'étude du comportement des systèmes dynamiques hybrides.

Motivation

Contexte

- Reproduction non satisfaisante des systèmes du monde réel par des modèles à formalisme unique.
- Intérêt croissant pour les modèles hybrides.
- Absence de méthodes de vérification symbolique pour l'étude du comportement des systèmes dynamiques hybrides.

Motivation

Contexte

- Reproduction non satisfaisante des systèmes du monde réel par des modèles à formalisme unique.
- Intérêt croissant pour les modèles hybrides.
- Absence de méthodes de vérification symbolique pour l'étude du comportement des systèmes dynamiques hybrides.

Objectif

Nouvelle méthode pour étudier la dynamique d'un système continu.

Contribution

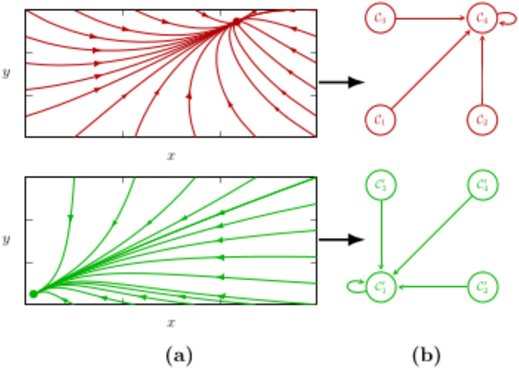


Figure – [(a)-(b)]- Modélisation de systèmes d'EDO sous forme de chaîne de Markov à temps discret.

Définitions et notations

Équation Différentielle Ordinaire(EDO)

Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^n$. On considère un problème de Cauchy associé à une EDO :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) &= f(x(t), \lambda), \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Notations

- $x(t, x_0, \lambda)$: trajectoire du système continu,
- $[0, T_{x_0}]$: domaine de définition de x,
- $\Phi \subset (\mathbb{R}^+)^n$: espace de phase compact.

Chaîne de Markov

Définition

Une chaîne de Markov est un tuple $\mathcal{M} = (S, s_0, P)$ où

- S : ensemble fini d'états,
- $s_0 \in S$: état initial,
- $P : S \times S \rightarrow [0,1]$: fonction de probabilité de transition tel que tout état s :

$$\sum_{s' \in S} \mathrm{P}(s, s') = 1.$$

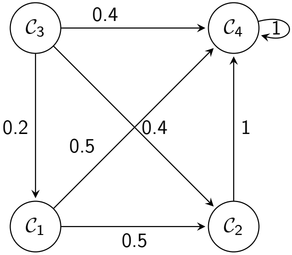


Figure – Chaîne de Markov

On considère la matrice des probabilités de transition $P = \left(P_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq q}$.

Définition de la chaîne de Markov : paramètres de la construction

Les paramètres

- τ : temps d'observation des trajectoires $x(t, x_0)$,
- $\mathcal{Q} = \{\mathcal{C}_i\}_{1 \leq i \leq q}$: partition de Φ.

Relation entre les paramètres et la chaîne de Markov

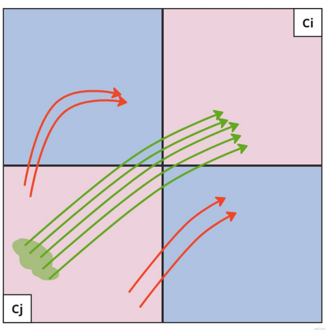
$$\mathcal{M}(\tau, \mathcal{Q}) = (\mathcal{Q}, \mathcal{C}_0, P^\tau)$$

- $C_i \in \mathcal{Q}$: état de la chaîne de Markov.
- τ : détermination d'existence d'une transition entre deux états.

Définition symbolique de la chaîne de Markov : détermination des probabilités

Rappel

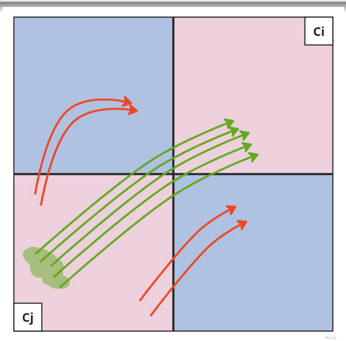
On considère la matrice des probabilités de transition $P^\tau = \left(P^\tau_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq q}$.



Définition symbolique de la chaîne de Markov : détermination des probabilités

Rappel

On considère la matrice des probabilités de transition $P^\tau = \left(P^\tau_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq q}$.



Valeur des probabilités de transition

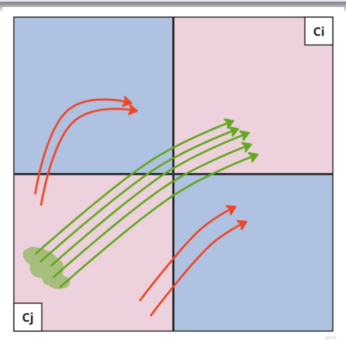
Pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, q\}^2$, on a :

- $T^\tau_{i,j} = \{x_0 \in \mathcal{C}_i \mid x(\tau, x_0) \in \mathcal{C}_j\}$.

Définition symbolique de la chaîne de Markov : détermination des probabilités

Rappel

On considère la matrice des probabilités de transition $P^\tau = \left(P^\tau_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq q}$.



Valeur des probabilités de transition

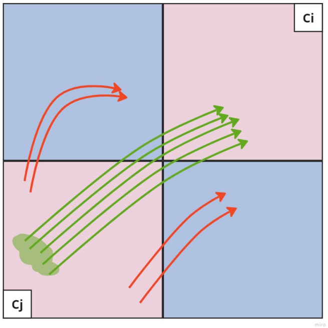
Pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, q\}^2$, on a :

- $T^\tau_{i,j} = \{x_0 \in \mathcal{C}_i \mid x(\tau, x_0) \in \mathcal{C}_j\}$.
- $P^\tau_{i,j} = \dfrac{\mu(T^\tau_{i,j})}{\mu(\mathcal{C}_i)}$.

Définition symbolique de la chaîne de Markov : détermination des probabilités

Rappel

On considère la matrice des probabilités de transition $P^\tau = \left(P^\tau_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq q}$.



Valeur des probabilités de transition

Pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,q\}^2$, on a :

- $T^\tau_{i,j} = \{x_0 \in \mathcal{C}_i \mid x(\tau, x_0) \in \mathcal{C}_j\}$.
- $P^\tau_{i,j} = \dfrac{\mu(T^\tau_{i,j})}{\mu(\mathcal{C}_i)}$.
- $\sum_{1\leq j\leq q} P^\tau_{i,j} = 1$.

Estimation numérique de la chaîne de Markov par la vérification statistique de modèle(SMC)

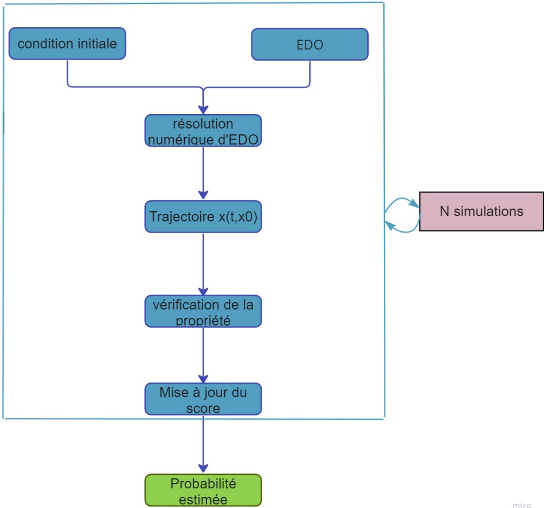
On considère la matrice de probabilités de transition approchées $\tilde{P}^{\tau} = \left(\tilde{P}^{\tau}_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq q}$.

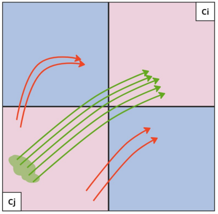
Calcul de $\tilde{P}^{\tau}_{i,j}$

Pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, q\}^2$, on considère :

- Propriété : " pour $x_{0,r} \in \mathcal{C}_i$, on a $x(\tau, x_{0,r}) \in \mathcal{C}_j$".
- Pour M simulations, on effectue :
  1. une génération aléatoire de $x_{0,r} \in \mathcal{C}_i$,
  2. une vérification de la propriété,
  3. une mise à jour du compteur : 1 pour la propriété satisfaite et 0 sinon.
- La valeur de $\tilde{P}^{\tau}_{i,j}$: moyenne de la valeur finale du compteur sur M.

Estimation numérique de la chaîne de Markov par la vérification statistique de modèle(SMC)





Précision de la valeur de probabilité approchée

Choix du nombre de simulations M

- Si M suffisamment grand, alors

1. $\mathbb{P}(|\tilde{P}^{\tau}_{i,j} - P^{\tau}_{i,j}| \leq \alpha) \geq 1 - \theta,$
2. $\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{q} \tilde{P}^{\tau}_{i,j} - 1 \leq \alpha'\right) \geq 1 - \theta', \qquad \forall i \in \{1, \ldots, q\}.$

Illustration : Estimation de la chaîne de Markov pour un système bi-stable

Système bistable

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - x(x-1)(x-2), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y. \end{cases}$$

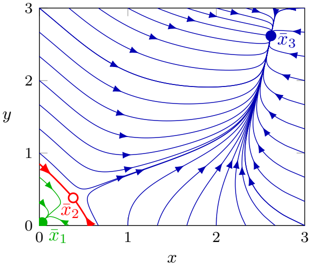
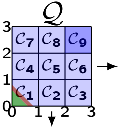
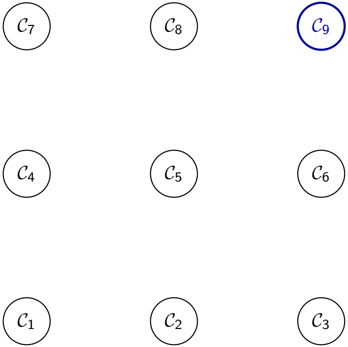


Figure – Portrait de phase pour un système bi-stable.





Chaîne de Markov à 9 éléments, pour un temps $\tau \gg 1$.

Illustration : Estimation de la chaîne de Markov pour un système bi-stable

Système bistable

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - x(x-1)(x-2), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y. \end{cases}$$

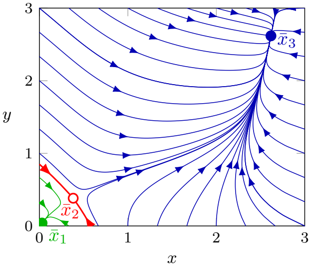
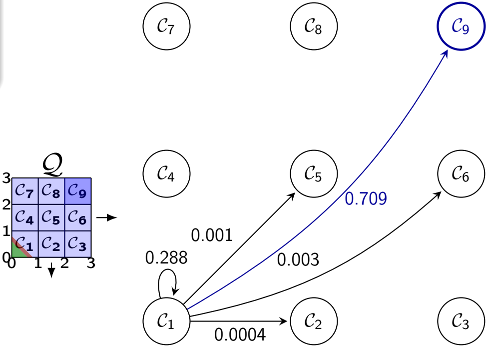


Figure – Portrait de phase pour un système bi-stable.



Chaîne de Markov à 9 éléments, pour un temps $\tau \gg 1$.

Illustration : Estimation de la chaîne de Markov pour un système bi-stable

Système bistable

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - x(x-1)(x-2), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y. \end{cases}$$

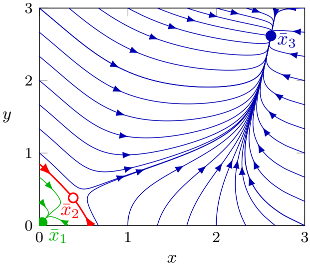
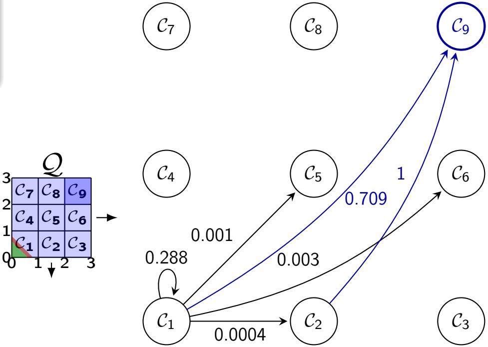


Figure – Portrait de phase pour un système bi-stable.



Chaîne de Markov à 9 éléments, pour un temps $\tau \gg 1$.

Illustration : Estimation de la chaîne de Markov pour un système bi-stable

Système bistable

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - x(x-1)(x-2), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y. \end{cases}$$

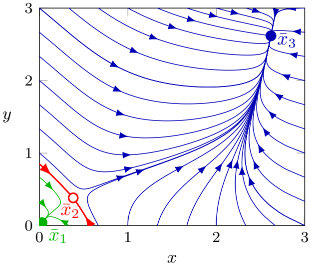
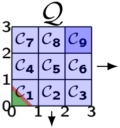
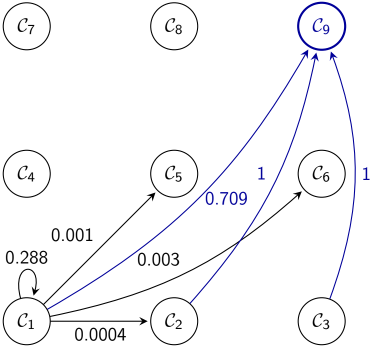


Figure – Portrait de phase pour un système bi-stable.





Chaîne de Markov à 9 éléments, pour un temps $\tau \gg 1$.

Illustration : Estimation de la chaîne de Markov pour un système bi-stable

Système bistable

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - x(x-1)(x-2), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y. \end{cases}$$

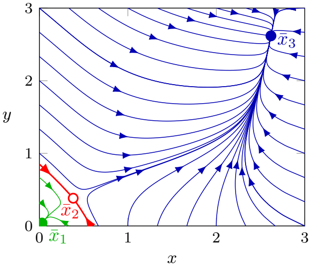
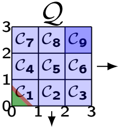
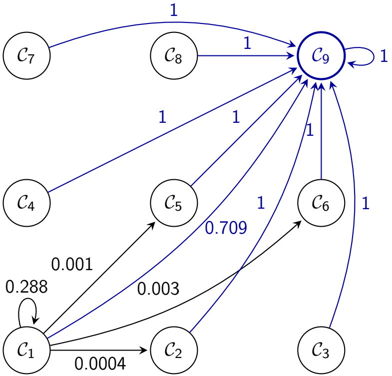


Figure – Portrait de phase pour un système bi-stable.





Chaîne de Markov à 9 éléments, pour un temps $\tau \gg 1$.

Analyse asymptotique de la chaîne de Markov

Dynamique asymptotique

- Pour τ suffisamment grand, la chaîne de Markov reproduit dynamique asymptotique du système d'EDO.

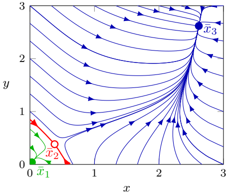
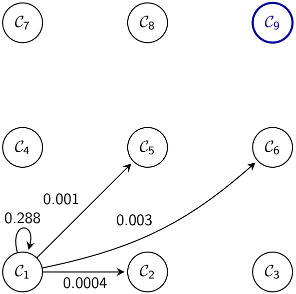


Figure – Portrait de phase pour un système bi-stable.



Analyse asymptotique de la chaîne de Markov

Dynamique asymptotique

- Pour τ suffisamment grand, la chaîne de Markov reproduit dynamique asymptotique du système d'EDO.

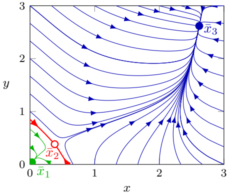
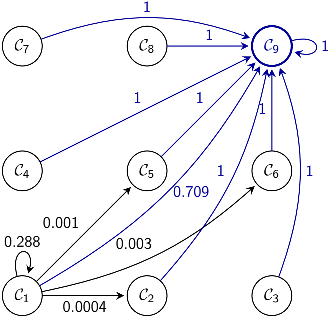
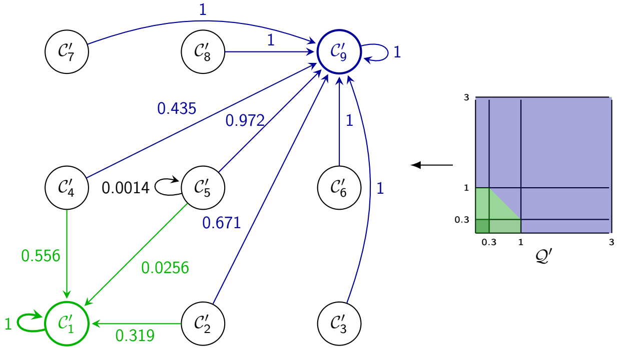


Figure – Portrait de phase pour un système bi-stable.



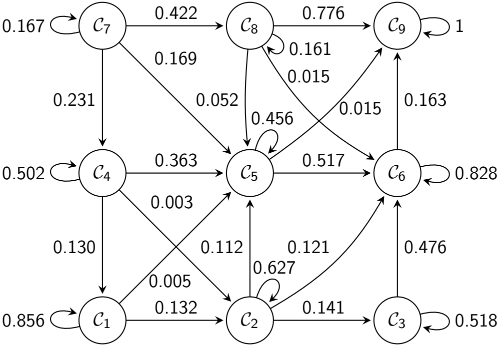
Recherche d'autres points d'équilibre



Analyse transitoire de la chaîne de Markov

Dynamique transitoire

- Pour τ suffisamment petit, la chaîne de Markov reproduit la dynamique transitoire du système d'EDO.

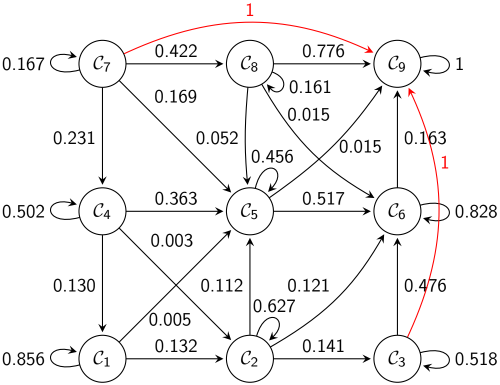


Chaîne de Markov reproduisant la dynamique transitoire.

Analyse transitoire de la chaîne de Markov

Dynamique transitoire

- Pour τ suffisamment petit, la chaîne de Markov reproduit la dynamique transitoire du système d'EDO.

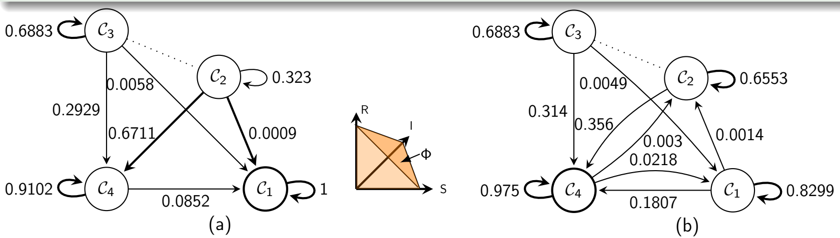


Chaîne de Markov reproduisant la dynamique transitoire.

Cas d'étude : SIR(sain, infecté, récupéré)

SIR

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \Lambda - \mu S - \omega \frac{IS}{N}, \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \omega \frac{IS}{N} - (\gamma + \mu) I, \qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - \mu R.$$



Chaîne de Markov approchée $\widetilde{\mathcal{M}}(\tau, \mathcal{Q})$ reproduisant la dynamique transitoire du modèle épidémiologique. (a) Lorsque $R_0 < 1$, l'équilibre sans maladie E_0 appartient à la cellule $\mathcal{C}_1$. (b) Lorsque $R_0 > 1$, l'équilibre endémique E_1 appartient à la cellule $\mathcal{C}_4$.

Conclusion

Résumé

- Nouvelle technique d'abstraction de systèmes continu sous forme de chaîne de Markov.
- Étude de la validité du modèle :
  - Analyse asymptotique.
  - Analyse transitoire.
- Application à un cas épidémiologique : SIR.

Conclusion

Résumé

- Nouvelle technique d'abstraction de systèmes continu sous forme de chaîne de Markov.
- Étude de la validité du modèle :
  - Analyse asymptotique.
  - Analyse transitoire.
- Application à un cas épidémiologique : SIR.

Perspective

- Couplage de chaînes de Markov par des systèmes discrets pour faire des contrôles.
- Analyse plus approfondie de l'influence de $(\tau, \mathcal{Q})$ sur les résultats de la Chaîne de Markov.