Revue de l'art: systèmes hybrides et décidabilité

David JULIEN
david.julien@univ-nantes.fr

Nantes Université - LS2N (VELO)
B. DELAHAYE, G. CANTIN, G. ARDOUREL

Dec. 19, 2024

Outline

Outline

Système dynamique

Définitions

- EDO: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t) = f(\xi(t))$;
- système dynamique: couple $(\mathbb{R}^n, f)$ où f est *régulière* et définit une EDO;
- trajectoire : solution $\xi :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ à l'EDO.

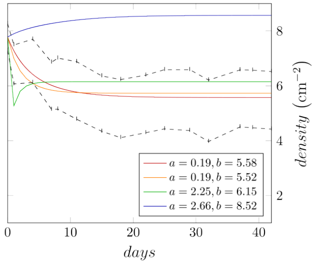
Système dynamique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = ax(t)(1 - \frac{b}{x(t)})$$

$$\to f(\cdot) = a[\cdot](1 - \frac{b}{[\cdot]}), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Définitions

- EDO: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t) = f(\xi(t))$;
- système dynamique: couple $(\mathbb{R}^n, f)$ où f est *régulière* et définit une EDO;
- trajectoire : solution $\xi :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ à l'EDO.



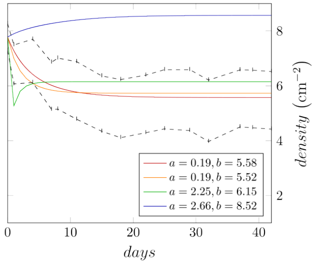
Système dynamique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = ax(t)(1 - \frac{b}{x(t)})$$

$$\rightarrow f(\cdot) = a[\cdot](1 - \frac{b}{[\cdot]}), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Définitions

- EDO: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t) = f(\xi(t))$;
- système dynamique: couple $(\mathbb{R}^n, f)$ où f est *régulière* et définit une EDO;
- trajectoire : solution $\xi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ à l'EDO.



Systèmes "prévisibles"

Définition simple (paramétrage unique) de systèmes isolés.
$\rightarrow$ Évolution déterminée dès l'instantiation.

Outline

EDOs paramétrées

Une EDO paramétrée

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t) = f(\xi(t), \lambda)$;
- ex: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = ax(t)(1 - \frac{b}{x(t)})$;
- changer de dynamique.

Deux types de transition

- transition continue (évo. interne);
- transition discrète (changement dynamique / valeur);

EDOs paramétrées

Une EDO paramétrée

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t) = f(\xi(t), \lambda)$;
- ex: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = ax(t)(1 - \frac{b}{x(t)})$;
- changer de dynamique.

Deux types de transition

- transition continue (évo. interne);
- transition discrète (changement dynamique / valeur);

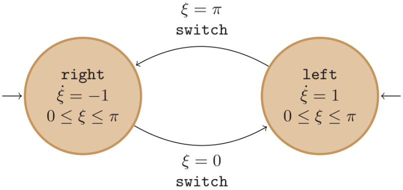


Fig. 7.1. Hybrid dynamical system modeling a windshield wiper.

Automates hybrides [1]

Définition

- ensemble X d'états;
- ensemble U d'entrées;
- un invariant In par état;
- une guarde Gu par transition;
- un jeu Re de remises à zéro par transition;

Essuie-glace

- $X = \{\texttt{left}, \texttt{right}\} \times \mathbb{R}$;
- $U = \emptyset \cup \mathbb{R}_0^+$;
- $\mathrm{In}_{\texttt{left}} = \mathrm{In}_{\texttt{right}} = [0, \pi]$;
- $\mathrm{Gu}_{\texttt{right}\to\texttt{left}} = \{\xi =? \ 0\}$;
- $\mathrm{Re}_{\texttt{right}\to\texttt{left}} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$;

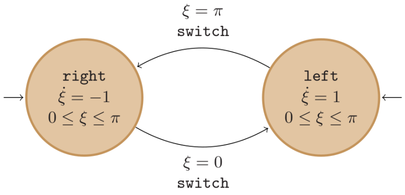


Fig. 7.1. Hybrid dynamical system modeling a windshield wiper.

ALUR, R., et al. - *in* International Hybrid Systems Workshop, 1993.

Vérification ?

Propriétés

- accessibilité
  → un état donné est-il toujours accessible ?
  → peut-on s'assurer de finir dans un certain état ?
- sécurité
  → peut-on s'assurer de **ne pas** passer par un certain état ?

Vérification ?

Propriétés

- accessibilité
  $\rightarrow$ un état donné est-il toujours accessible ?
  $\rightarrow$ peut-on s'assurer de finir dans un certain état ?
- sécurité
  $\rightarrow$ peut-on s'assurer de **ne pas** passer par un certain état ?

Trop expressif

- infinité (indénombrable) d'états;
- infinité d'embranchements (actions);
- décidibalité de la théorie des réels
  $\rightarrow$ "pour toute formule réelle φ, existe-t-il $a, b, \dots \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(a, b, \dots)$ est vraie ?"

Restreindre les ODEs

Automates rectangulaires initialisés [8]

- $\forall i \in [1, N], \frac{\mathrm{d}\xi_i(t)}{\mathrm{d}t} \in [L_i, U_i]$;
- $[L_i, U_i] \neq [L_j, U_j] \Rightarrow$ remise à 0;

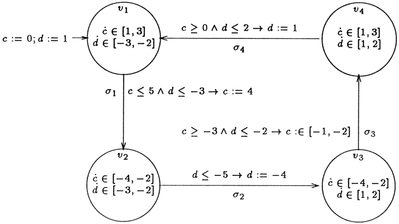


FIG. 1. The initialized rectangular automaton $\hat{A}$.

HENZINGER, et al. - What's decidable about Hybrid Automata? *in* Journal of Computer and System Sciences. 1998.

Restreindre les ODEs

Automates rectangulaires initialisés [8]

- $\forall i \in [1, N], \frac{\mathrm{d}\xi_i(t)}{\mathrm{d}t} \in [L_i, U_i]$;
- $[L_i, U_i] \neq [L_j, U_j] \Rightarrow$ remise à 0;

- Accessibilité décidable + algo;
- Frontière entre décidabilité et indécidabilité.

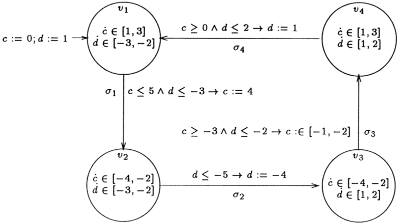


FIG. 1. The initialized rectangular automaton $\hat{A}$.

HENZINGER, et al. - What's decidable about Hybrid Automata? *in* Journal of Computer and System Sciences. 1998.

Restreindre les ODEs

Automates rectangulaires initialisés [8]

- $\forall i \in [1, N], \frac{\mathrm{d}\xi_i(t)}{\mathrm{d}t} \in [L_i, U_i]$;
- $[L_i, U_i] \neq [L_j, U_j] \Rightarrow$ remise à 0;

- Accessibilité décidable + algo;
- Frontière entre décidabilité et indécidabilité.

- Indécidable si on compare des variables dont les flots sont différents;
- Indécidable dans le cas des chronomètres.

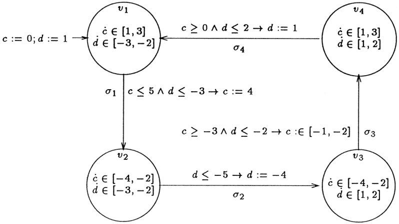
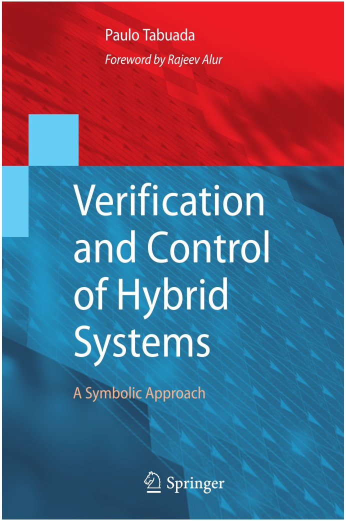


FIG. 1. The initialized rectangular automaton $\hat{A}$.

HENZINGER, et al. - What's decidable about Hybrid Automata? *in* Journal of Computer and System Sciences. 1998.

Abstraire un automate hybride ? [11]



Bisimulation de systèmes

- Montrer une équivalence entre deux systèmes ;
- Capturer le comportement d'un système complexe par un autre, plus simple ;
- Prouver des propriétés sur le système simple ;
- Conclure.

TABUADA, P. - Verification and Control of Hybrid Systems. Springer US, 2009.

Bisimulation finie

Structures *o-minimales* [9, 4]

$\langle M, <, \ldots \rangle$ où

- M est un ensemble;
- $<$ est un ordre;
- $\ldots$ désigne des opérations que l'on se donne sur cette structure;

o-minimale $\Leftrightarrow$ tout sous-ensemble définissable sur cette structure est une union finie d'intervales.

Bisimulation finie

Structures *o-minimales* [9, 4]

$\langle M, <, \ldots \rangle$ où

- M est un ensemble;
- $<$ est un ordre;
- $\ldots$ désigne des opérations que l'on se donne sur cette structure;

o-minimale $\Leftrightarrow$ tout sous-ensemble définissable sur cette structure est une union finie d'intervales.

LAFFERRIERE et al. 2000 [9]

- Abstraction de l'espace;
- Bisimulation finie;
- Algorithme pour créer la partition de l'espace.

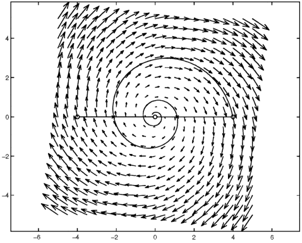


Fig. 2. Algorithm 2 does not terminate.

LAFFERRIERE, G. et al. - O-Minimal Hybrid Systems *in* Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2000

Bisimulation finie

Structures *o-minimales* [9, 4]

$\langle M, <, \dots \rangle$ où

- M est un ensemble;
- $<$ est un ordre;
- $\dots$ désigne des opérations que l'on se donne sur cette structure;

o-minimale $\Leftrightarrow$ tout sous-ensemble définissable sur cette structure est une union finie d'intervalles.

BERARD et al. 2018 [4]

- Abstraction du temps;
- Bisimulation finie.

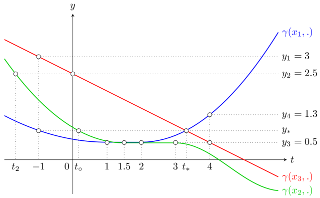


Figure 1 A dynamical system with three trajectories.

BERARD, B. et al. - Finite Bisimulations for Dynamical Systems with Overlapping Trajectories *in* 27th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2018). 2018

Bisimulation finie

Structures *o-minimales* [9, 4]

$\langle M, <, \dots \rangle$ où

- M est un ensemble;
- $<$ est un ordre;
- $\dots$ désigne des opérations que l'on se donne sur cette structure;

o-minimale $\Leftrightarrow$ tout sous-ensemble définissable sur cette structure est une union finie d'intervales.

Limites

- Structures pour la description des solutions aux ODEs
- ODEs résolvables $\Leftrightarrow$ ODEs linéaires

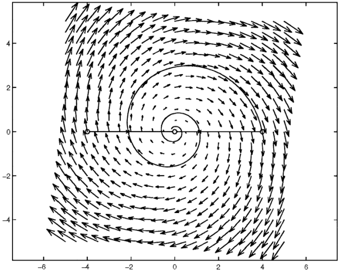


Fig. 2. Algorithm 2 does not terminate.

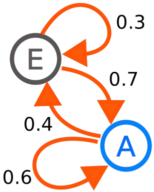
Autres idées

- "Sémantique imprécise" pour les automates hybrides [5];
- Extension de SAT aux EDOs par sur-approximation [6];
- Contrôle de systèmes non-linéaires déterministes [2].

Modèles probabilistes

Chaîne de Markov

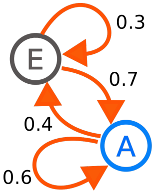
- graphe orienté $(E, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P} = (p_{i,j})_{(i,j) \in E^2}$ est une matrice de transition telle que $\sum_j p_{i,j} = 1$;
- probabilités de transition uniquement déterminées par l'état courant dans le graphe.



Modèles probabilistes

Chaîne de Markov

- graphe orienté $(E, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P} = (p_{i,j})_{(i,j)\in E^2}$ est une matrice de transition telle que $\sum_j p_{i,j} = 1$;
- probabilités de transition uniquement déterminées par l'état courant dans le graphe.

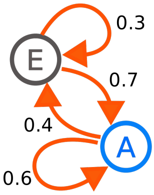


Utile pour les systèmes aléatoires isolés ou stables (fission nucléaire or lignes de production)

Modèles probabilistes

Chaîne de Markov

- graphe orienté $(E, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P} = (p_{i,j})_{(i,j)\in E^2}$ est une matrice de transition telle que $\sum_j p_{i,j} = 1$;
- probabilités de transition uniquement déterminées par l'état courant dans le graphe.

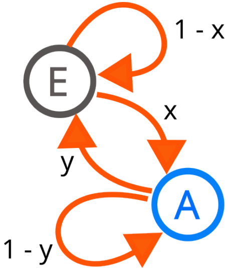


Pas de contrôle !

Modèles probabilistes contrôlés

Processus de Décision Markovien

- MC augmentée $(E, Act, \{\mathbb{P}_a\})$;
- choisir un action $a \leftrightarrow$ choisir une distribution de probabilité $\mathbb{P}_a$.



$$\begin{bmatrix} 1-x & x \\ y & 1-y \end{bmatrix}$$

Abstraire un système hybride

Abstraction de SH par PDM

- GYORI et al. 2015: *Approximate probabilistic verification of Hybrid Systems* [7];
- LAVAEI et al. 2022: *Constructing MDP abstractions using data with formal guarantees* [10];
- BANSE et al. 2023: *Data-driven abstractions via adaptive refinement and a Kantorovich metric* [3].

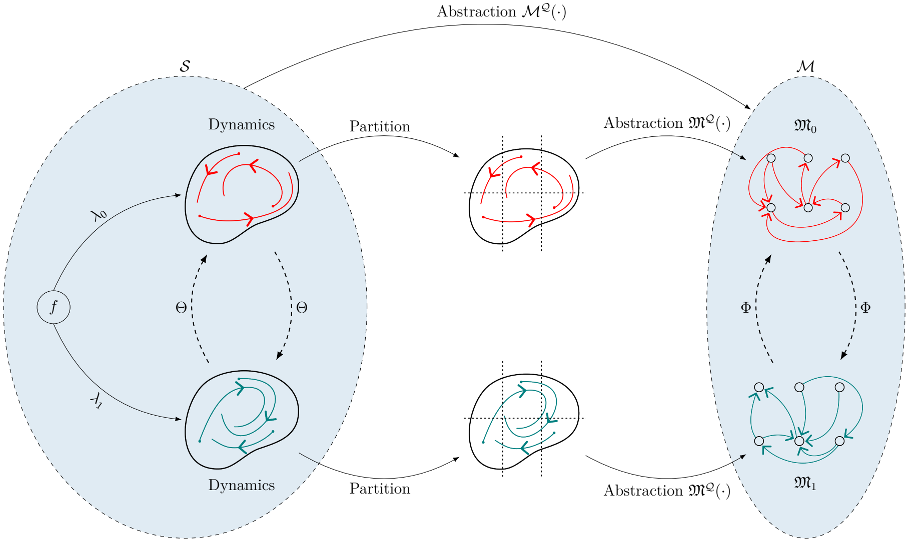
- Résoudre les questions d'expressivité;
- Relâcher les objectifs.

Abstraire un système hybride

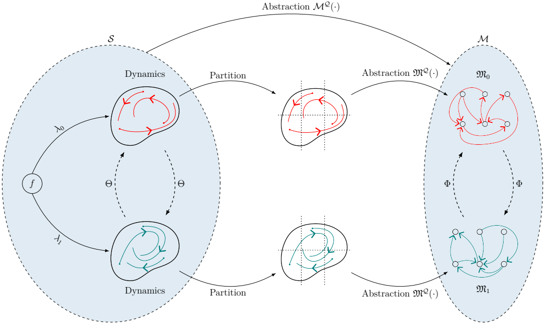
Abstraction de SH par PDM

- GYORI et al. 2015: *Approximate probabilistic verification of Hybrid Systems* [7];
- LAVAEI et al. 2022: *Constructing MDP abstractions using data with formal guarantees* [10];
- BANSE et al. 2023: *Data-driven abstractions via adaptive refinement and a Kantorovich metric* [3].

- GYORI encapsule l'historique de système dans une chaîne de Markov: la chaîne est un arbre et un seul chemi pour arriver dans un état précis + graphe infini;
- LAVAEI travaille sur des systèmes stochastiques, i.e. aléatoire incluse dans les ODEs;
- BANSE requiert que toute trajectoire possible ait une probabilité non-nulle d'être échantillonée.


Abstraction $\mathcal{M}^{\mathcal{Q}}(\cdot)$
$\mathcal{S}$
$\mathcal{M}$
Dynamics
Partition
Abstraction $\mathfrak{M}^{\mathcal{Q}}(\cdot)$
$\mathfrak{M}_0$
λ_0
f
λ_1
Θ
Θ
Φ
Φ
$\mathfrak{M}_1$
Dynamics
Partition
Abstraction $\mathfrak{M}^{\mathcal{Q}}(\cdot)$

Merci de votre attention



ALUR, R., COURCOUBETIS, C., HENZINGER, T. A., AND HO, P.-H.
Hybrid Automata: An Algorithmic Approach to the Specification and Verification of Hybrid Systems.
In *Hybrid Systems* (Berlin, Germany, Jan. 1993), vol. 736 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, pp. 209–229.

AZAKI, Z., GIRARD, A., AND OLARU, S.
Predictive and Symbolic Control: Performance and Safety for Non-linear Systems.
IFAC-PapersOnLine 55, 16 (Jan. 2022), 290–295.

BANSE, A., ROMAO, L., ABATE, A., AND JUNGERS, R. M.
Data-driven abstractions via adaptive refinements and a kantorovich metric [extended version], 2023.

BÉRARD, B., BOUYER, P., AND JUGÉ, V.
Finite Bisimulations for Dynamical Systems with Overlapping Trajectories.
In *27th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2018)* (Dagstuhl, Germany, 2018), D. R. Ghica and A. Jung, Eds., vol. 119 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, pp. 26:1–26:17.

CASAGRANDE, A., PIAZZA, C., AND POLICRITI, A.
Discrete Semantics for Hybrid Automata.
Discrete Event Dynamic Systems 19, 4 (Dec. 2009), 471–493.

EGGERS, A., RAMDANI, N., NEDIALKOV, N. S., AND FRÄNZLE, M.
Improving the SAT modulo ODE approach to hybrid systems analysis by combining different enclosure methods.
Software & Systems Modeling 14, 1 (Feb. 2015), 121–148.

GYORI, B. M., LIU, B., PAUL, S., RAMANATHAN, R., AND THIAGARAJAN, P.
Approximate probabilistic verification of hybrid systems.
In *International Workshop on Hybrid Systems Biology* (2015), vol. 9271 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 96–116.

HENZINGER, T. A., KOPKE, P. W., PURI, A., AND VARAIYA, P.
What's Decidable about Hybrid Automata?
Journal of Computer and System Sciences 57, 1 (Aug. 1998), 94–124.

LAFFERRIERE, G., PAPPAS, G. J., AND SASTRY, S.
O-Minimal Hybrid Systems.
Mathematics of Control, Signals and Systems 13, 1 (Feb. 2000), 1–21.

Lavaei, A., Soudjani, S., Frazzoli, E., and Zamani, M.
Constructing mdp abstractions using data with formal guarantees.
IEEE Control Systems Letters 7 (2022), 460–465.

Tabuada, P.
Verification and Control of Hybrid Systems.
Springer US, 2009.